

Dai quaternioni al colore dell'oro

luigi.barletti@unifi.it

Firenze, 11 febbraio 2015

Prologo

La nostra storia comincia il 16 ottobre 1843, quando il matematico dublinese **Sir William Rowan Hamilton** incise su una pietra del Brougham bridge una formula che aveva appena scoperto:



$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Cosa aveva di così importante questa formula?

Hamilton si stava occupando del seguente problema.
I **numeri complessi** possono essere visti come punti su un piano:

$$a + bi, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

con una regola di moltiplicazione che discende dalla proprietà dell'unità immaginaria

$$i^2 = -1.$$

E' possibile estendere questa costruzione a dimensioni più alte?

Hamilton cercò a lungo un'estensione a dimensione tre, della forma

$$a + bi + cj.$$

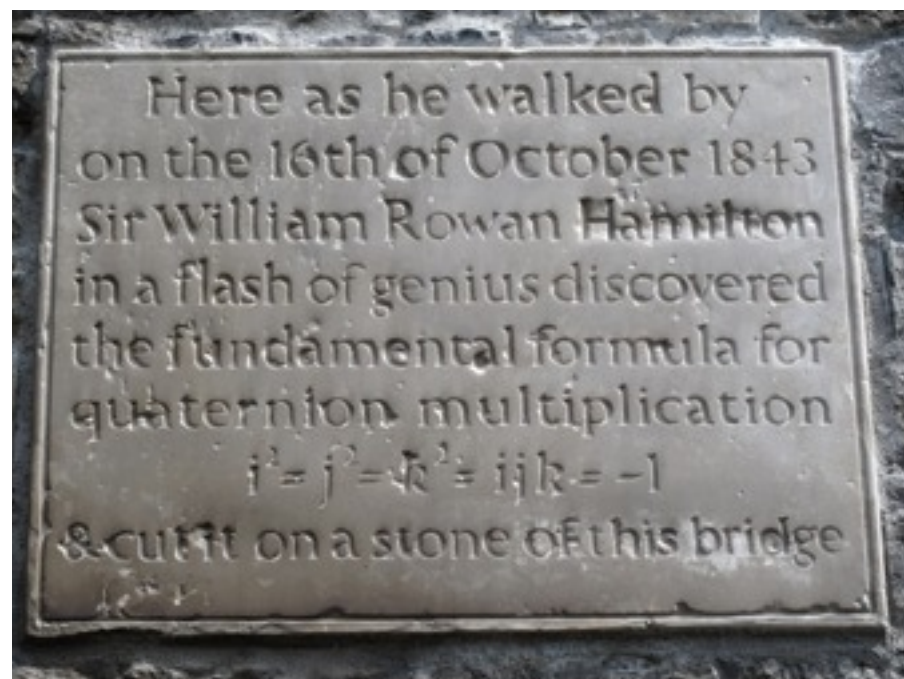
Quel famoso giorno, camminando lungo il Royal Canal, capì che questa era *impossibile* e che era necessaria una rappresentazione che facesse uso di *quattro* numeri reali.



Questa fu la nascita dei *quaternioni*, numeri generalizzati della forma

$$a + bi + cj + dk, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

con una regola di moltiplicazione discendente dalle proprietà delle “unità immaginarie” i, j, k , che era in effetti la formula incisa sul Brougham bridge:



$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

I quaternioni, così come i numeri reali e complessi, formano un'algebra di divisione (si può dividere ogni quaternioni per ciascun altro, diverso da zero).

Tuttavia, a differenza dei numeri reali e complessi, i quaternioni *non godono della proprietà commutativa*: in generale il prodotto dipende dall'ordine dei fattori.

Per esempio, le tre unità immaginarie anti-commutano a coppie:

$$ij + ji = ik + ki = jk + kj = 0$$

La meccanica quantistica

Facciamo adesso un salto agli anni venti del XX secolo. La **meccanica quantistica** si stava rapidamente affermando come la teoria fisica in grado di descrivere il mondo dell'infinitamente piccolo.



Passiamo in rassegna (in un linguaggio moderno) i postulati fondamentali della MQ.

Postulato I (stato di un sistema).

Lo stato di un sistema fisico è rappresentato da un vettore unitario in uno spazio di Hilbert complesso:

$$\psi \in \mathcal{H}, \quad \|\psi\| = \langle \psi, \psi \rangle^{1/2} = 1$$

ψ è la cosiddetta *funzione d'onda* del sistema.

Postulato 2 (osservabili)

Le quantità fisiche (*osservabili*) di un sistema sono rappresentate da operatori lineari e simmetrici su \mathcal{H}

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \langle A\psi, \psi \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle.$$

L'operatore che corrisponde all'osservabile *energia* è detto **Hamiltoniana** del sistema e gioca un ruolo centrale nella teoria.

Lo indicheremo con H .

Postulato 3.1 (valori di un osservabile)

I possibili valori misurati dell'osservabile A corrispondono allo *spettro* di A e quindi si trovano risolvendo l'*equazione agli autovalori*

$$A\psi = a\psi$$

Notare che le misurazioni saranno numeri *reali* perché un operatore simmetrico ha spettro reale.

Postulato 3.2 (misurazioni)

Quando si esegue un esperimento per misurare l'osservabile A su un sistema che si trova nello stato ψ , il risultato dell'esperimento è una *variabile aleatoria* X con valore atteso

$$\mathbb{E}[X] = \langle A\psi, \psi \rangle$$

Secondo la meccanica quantistica il mondo è *intrinsecamente* probabilistico!



Postulato 4 (dinamica)

L'evoluzione di un sistema fisico è determinata dall'equazione

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi$$

dove H è l'Hamiltoniana e \hbar è la costante di Planck divisa per 2π .

Si tratta di una legge deterministica: se si conosce lo stato a un certo istante di tempo, allora lo si conosce a tutti gli istanti successivi (e precedenti).

Fin qui la struttura astratta della teoria. Ora abbiamo bisogno di una ricetta concreta per costruire gli operatori associati agli osservabili. Questa ricetta si chiama *quantizzazione*.

Quantizzazione

Gli osservabili della MQ (operatori) sono ottenuti da quelli classici (funzioni) per mezzo delle sostituzioni formali

$$f(x) \longmapsto f(x)\psi(x), \quad p \longmapsto -i\hbar\nabla\psi(x)$$

dove gli operatori agiscono su $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

Ad esempio, l'Hamiltoniana quantistica che si ottiene dall'Hamiltoniana classica per una particella di massa m ed energia potenziale V

$$h(x, p) = \frac{1}{2m} |p|^2 + V(x)$$

sarà l'operatore

$$H\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi$$

Pertanto, i possibili valori E dell'energia saranno dati dall'equazione agli autovalori

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

(detta anche *equazione di Schrödinger stazionaria*) e l'evoluzione del sistema dall'*equazione di Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

Ora, supponiamo di voler descrivere un elettrone sottoposto alla forza Coulombiana attrattiva esercitata dal nucleo positivo.

E' esattamente un **problema di Keplero quantistico**.

Per quanto appena visto, l'Hamiltoniana quantistica di tale sistema è

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 |x|}$$

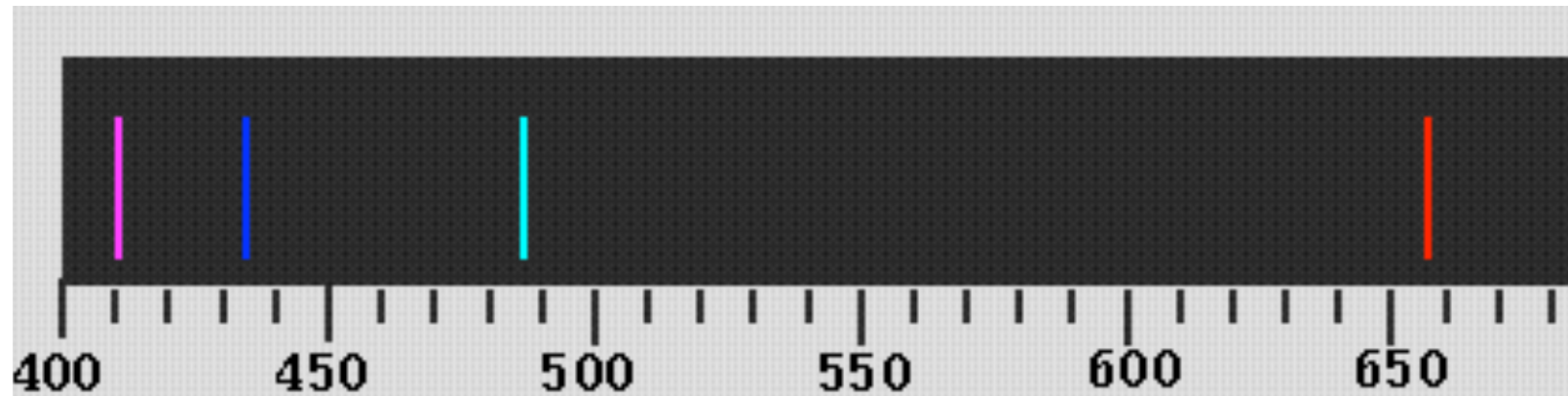
... e le possibili energie dell'elettrone saranno date dall'equazione agli autovalori

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \psi(x) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 |x|} \psi(x) = E\psi(x)$$

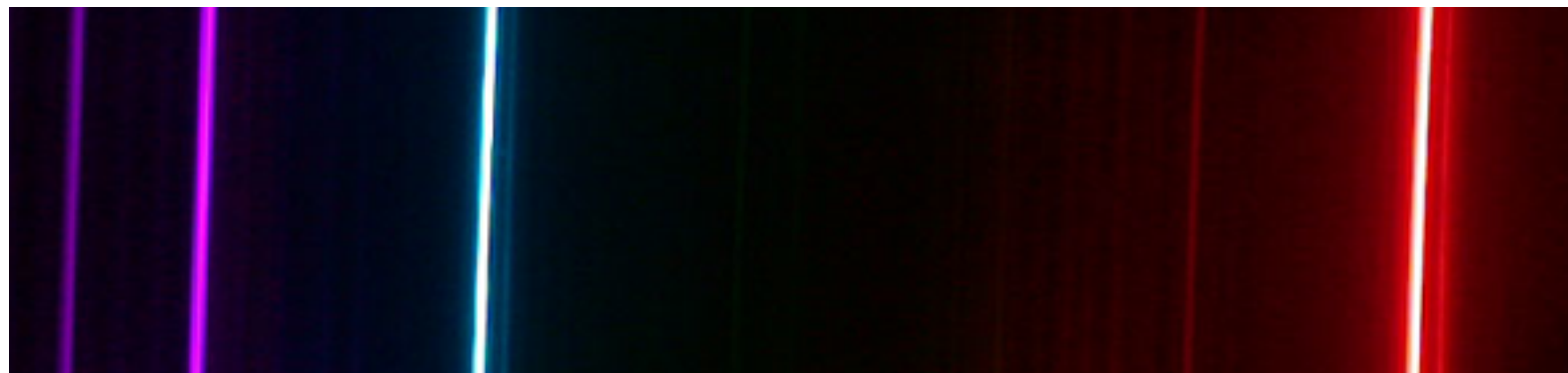
Questa equazione può essere *risolta esplicitamente* e il risultato è una successione di livelli di energia discreti:

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

L'accordo con le misure sperimentali dell'emissione di luce da parte degli atomi fu spettacolare!



Idrogeno,
teorico

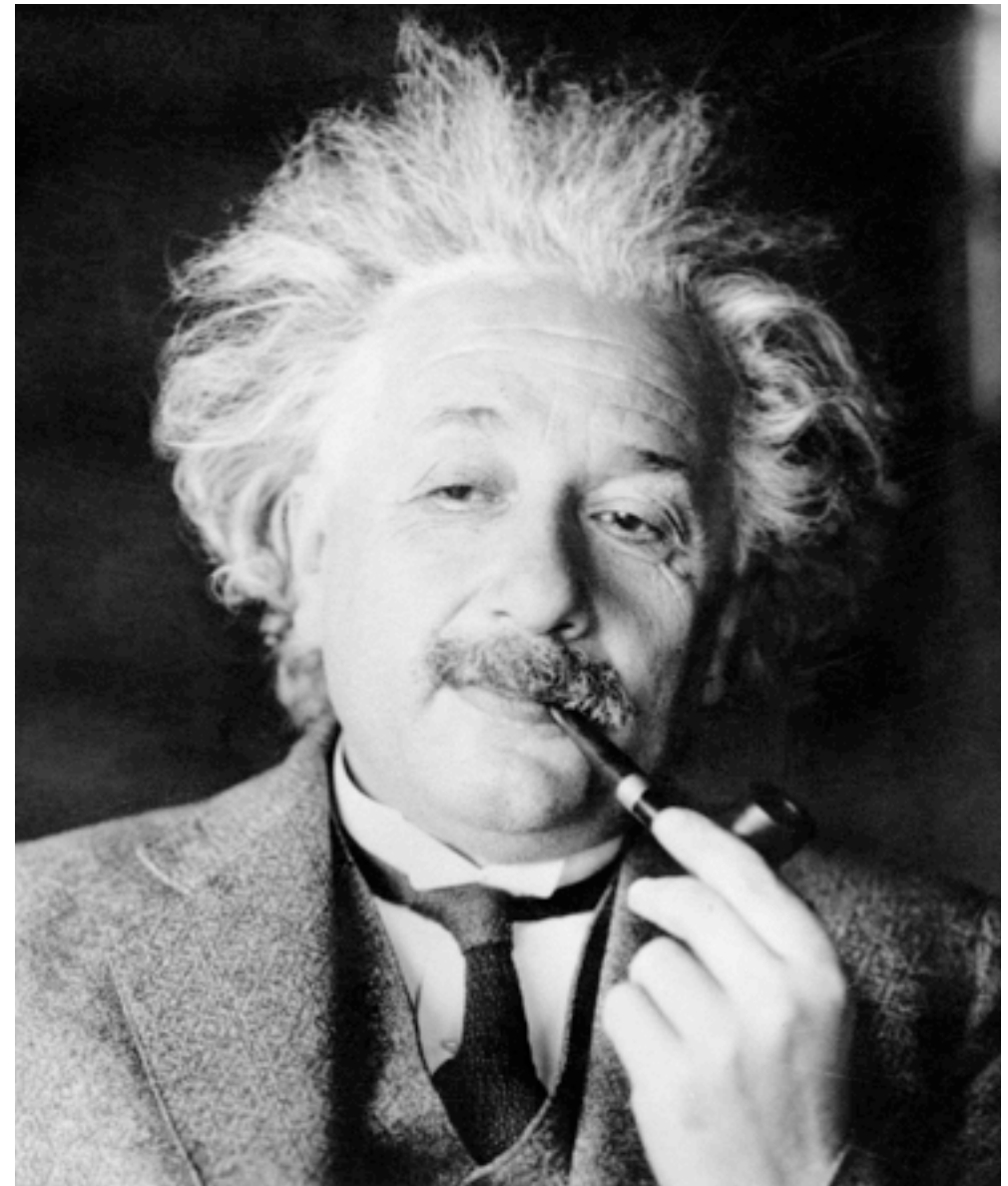


Idrogeno,
misurato

Lo spettro fisico e lo spettro matematico coincidono!

Il calcolo degli spettri degli atomi idrogenoidi decretò il successo della meccanica quantistica, proprio come la dimostrazione delle leggi di Keplero decretò il successo della meccanica Newtoniana.

Il passo successivo doveva essere quello di combinare la MQ con l'altra grande teoria fisica elaborata pochi anni prima: la *relatività Einsteiniana*.



L'equazione di Dirac

La teoria della relatività (speciale), nonostante il nome, è anche una “teoria degli assoluti”.

Certo, essa afferma che i valori di tempo, lunghezza ed energia sono solo relativi all’osservatore, ma ci dice anche che ci sono quantità *invarianti*, sulle quali tutti gli osservatori (inerziali) concorderanno.

In particolare, se indichiamo con E l’energia totale di un sistema meccanico and con p il suo impulso totale, risulta che la quantità

$$\sqrt{E^2 - c^2 |p|^2}$$

è la stessa per tutti gli osservatori.

Che cos'è questa quantità?

Einstein la identificò con la *massa totale*:

$$\sqrt{E^2 - c^2|p|^2} = mc^2$$

Esplicitando rispetto ad E , *ed escludendo la soluzione negativa*, si ottiene

$$E = \sqrt{c^2|p|^2 + c^4m^2}$$

che ci fornisce l'Hamiltoniana relativistica per una particella libera.

Nell'articolo *The quantum theory of the Electron* (1928) Paul Adrien Maurice Dirac riuscì a ottenere la versione relativistica dell'equazione di Schrödinger.



Le implicazioni della sua teoria si rivelarono straordinarie, oltre ogni immaginazione.

Proviamo a seguire il ragionamento di Dirac.

Considerando per primo il caso della particella libera, il punto di partenza era l'Hamiltoniana classica fornita dalla teoria di Einstein:

$$E = \sqrt{c^2 |p|^2 + c^4 m^2}$$

Il primo tentativo di quantizzarla era stato compiuto da W. Gordon e O. Klein.

Essi ne avevano preso il quadrato

$$E^2 = c^2 |p|^2 + c^4 m^2$$

e vi avevano applicato la quantizzazione $p \mapsto -i\hbar\nabla$ ottenendo il quadrato dell'Hamiltoniana quantistica

$$H^2 = -c^2 \hbar^2 \Delta + c^4 m^2$$

Quindi scrissero una “equazione di Schrödinger quadrata”

$$\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = c^2 \hbar^2 \Delta \psi - c^4 m^2 \psi$$

Dirac considerò l’equazione di Klein-Gordon *non soddisfacente* perché, essendo del secondo ordine nel tempo, necessita di due dati di Cauchy, il che contrasta con la struttura di base della MQ, per la quale un *singolo* dato di Cauchy (la funzione d’onda iniziale) determina passato e futuro del sistema.

Un'altra possibilità era quantizzare direttamente $\sqrt{c^2|p|^2 + c^4m^2}$, il che conduce a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(\sqrt{-c^2\hbar^2 \Delta + c^4m^2} \right) \psi$$

Sebbene la radice quadrata di un operatore differenziale sia un'entità matematica ben definita, essa risulta *non locale* nello spazio: il comportamento del sistema in un punto x dipende *istantaneamente* da ciò che accade in ogni altro punto $x' \in \mathbb{R}^3$.

Questa ed altre difficoltà convinsero Dirac a respingere anche questo approccio.

Ed eccoci alla brillante idea di Dirac.

Proviamo a prendere la radice di

$$-c^2 \hbar^2 \Delta + c^4 m^2,$$

in un altro modo: cerchiamo un operatore H tale che

$$H^2 = -c^2 \hbar^2 \Delta + c^4 m^2.$$

Dirac provò con la forma più semplice possibile: un operatore lineare del prim'ordine del tipo

$$H = c\hbar \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta c^2 m$$

Quindi:

$$\begin{aligned} H^2 &= HH = \\ &= c^2 \hbar^2 \left[\alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right] \\ &\quad + c^3 m \hbar \left[(\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) \frac{\partial}{\partial y} + (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3) \frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &\quad + c^4 m^2 \beta^2 \end{aligned}$$

Pertanto si trovano le condizioni

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = -1$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_1 = \alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1\beta + \beta\alpha_1 = \alpha_2\beta + \beta\alpha_2 = \alpha_3\beta + \beta\alpha_3 = 0$$

$$\beta^2 = 1$$

che *non possono* essere soddisfatte da numeri ordinari
ma possono essere soddisfatte da **quaternioni!**

I quaternioni possono essere rappresentati tramite matrici. Nella rappresentazione più semplice possibile le unità immaginarie sono le matrici

$$i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Nel caso $\beta = 0$ il sistema ammette la soluzione

$$\alpha_1 = i\sigma_1, \quad \alpha_2 = i\sigma_2, \quad \alpha_3 = i\sigma_3,$$

(fisicamente corrisponde al caso di particelle di massa nulla come fotoni e neutrini).

Per risolvere il sistema completo, con $m > 0$, Dirac dovette usare matrici 4×4 e trovò la soluzione

$$\alpha_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

(si tratta in questo caso di una rappresentazione dell'algebra di Clifford $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$).

Nacque così la famosa **Equazione di Dirac**

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = c\hbar \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi + \beta c^2 m \psi$$

Si noti che l'Hamiltoniana è una matrice di operatori e quindi agisce su funzioni d'onda a 4 componenti

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

dette **spinori**.

I frutti della teoria di Dirac

Il fatto che gli elettroni siano descritti da funzioni d'onda con quattro componenti ha implicazioni fisiche profonde.

Infatti gli operatori che agiscono su funzioni d'onda vettoriali sono ovviamente di più di quelli che agiscono sulle funzioni d'onda scalari. Ma questo significa che *gli spinori possiedono più osservabili rispetto alle particelle scalari.*

Che cosa sono questi nuovi osservabili?

Consideriamo ad esempio i tre operatori

$$S_i = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3$$

Le proprietà di commutazione

$$S_i S_j - S_j S_i = i S_k$$

sono formalmente le stesse di un momento angolare; dunque questi operatori sono associati alle tre componenti di un “momento angolare intrinseco” dell’elettrone, detto lo *spin*.

Gli autovalori di ciascuna delle tre matrici S_i sono

$$\pm \frac{\hbar}{2}$$

il che significa che i possibili valori dello spin in qualsiasi direzione sono solamente questi due. Lo spin può essere *su* o *giù* e il suo valore assoluto è una costante.

Nonostante le analogie con una rotazione, lo spin è un nuovo grado di libertà puramente quantistico, senza un equivalente classico.

L'esistenza dello spin dell'elettrone era già stata mostrata dagli esperimenti, e W. Pauli aveva scritto una versione spinoriale dell'equazione di Schrödinger. Ma ora, con l'equazione di Dirac, l'esistenza dello spin veniva *dedotta* da principi più fondamentali!

Inoltre, l'equazione di Dirac prediceva il valore corretto del cosiddetto *fattore giromagnetico* dell'elettrone (una quantità che misura l'interazione dello spin con un campo magnetico).

Questo fu il primo grande successo della teoria.

Ma nascosto nell'equazione di Dirac c'era qualcos'altro...

I possibili valori dell'energia di un elettrone libero corrispondono allo spettro di H e sono quindi dati dall'equazione agli autovalori

$$c\hbar \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi + \beta c^2 m \psi = E \psi$$

Questa può essere facilmente risolta per mezzo della trasformata di Fourier e fornisce i valori

$$E(p) = \pm \sqrt{c^2 |p|^2 + c^4 m^2}$$

Le energie negative, che erano state escluse nella trattazione classica, sono ricomparse!

Dunque, in una teoria quantistica relativistica è *impossibile* liberarsi delle energie negative.

Qual è il loro significato?

Per rispondere a questa domanda dobbiamo considerare l'Hamiltoniana di Dirac completa dei termini che descrivono l'interazione col campo elettromagnetico:

$$H(e) = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \left(\hbar\nabla - i\frac{e}{c}\mathbf{A} \right) + \beta mc^2 + eA_0$$

dove

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3).$$

Dirac osservò che le soluzioni di

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H(e)\psi, \quad H(e)\psi = E\psi$$

sono connesse dalla trasformazione (antiunitaria)

$$\varphi = \beta \alpha_2 \bar{\psi}$$

alle soluzioni di

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = H(-e)\varphi, \quad H(-e)\varphi = -E\varphi$$

e concluse che *un elettrone con energia negativa si comporta come una particella di carica opposta e con energia positiva.*

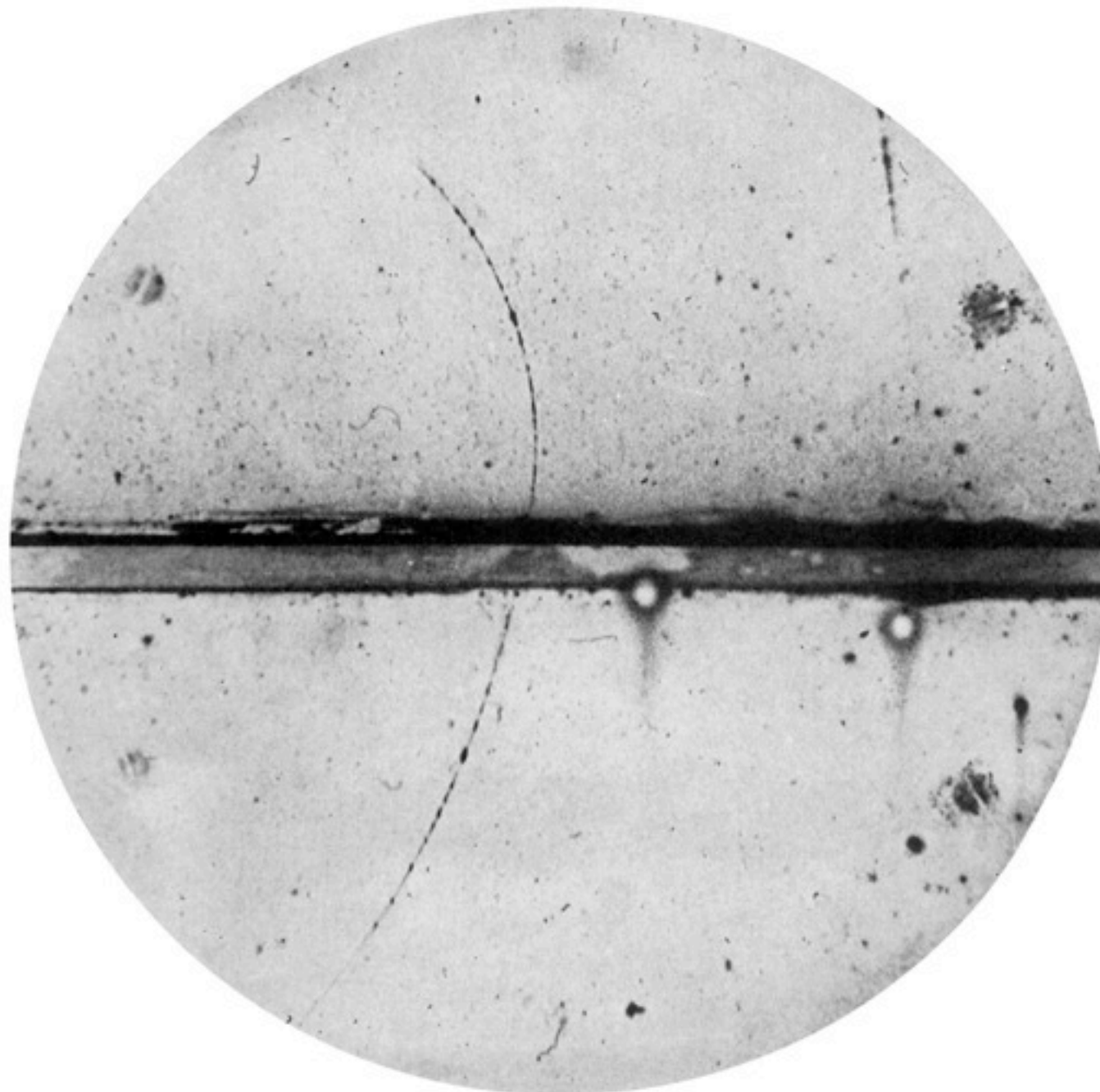
Per alcuni anni Dirac e altri fisici (in particolare Weyl e Oppenheimer) cercarono di interpretare tali soluzioni con energia negativa / carica positiva. (Per un certo periodo si credette che esse descrivessero il protone.)

Infine Dirac si convinse che la sua equazione descriveva la fisica dell'elettrone e *di un nuovo tipo di particella, con la stessa massa ma carica opposta.*

'We may call such a particle an anti-electron'
(Dirac 1931)

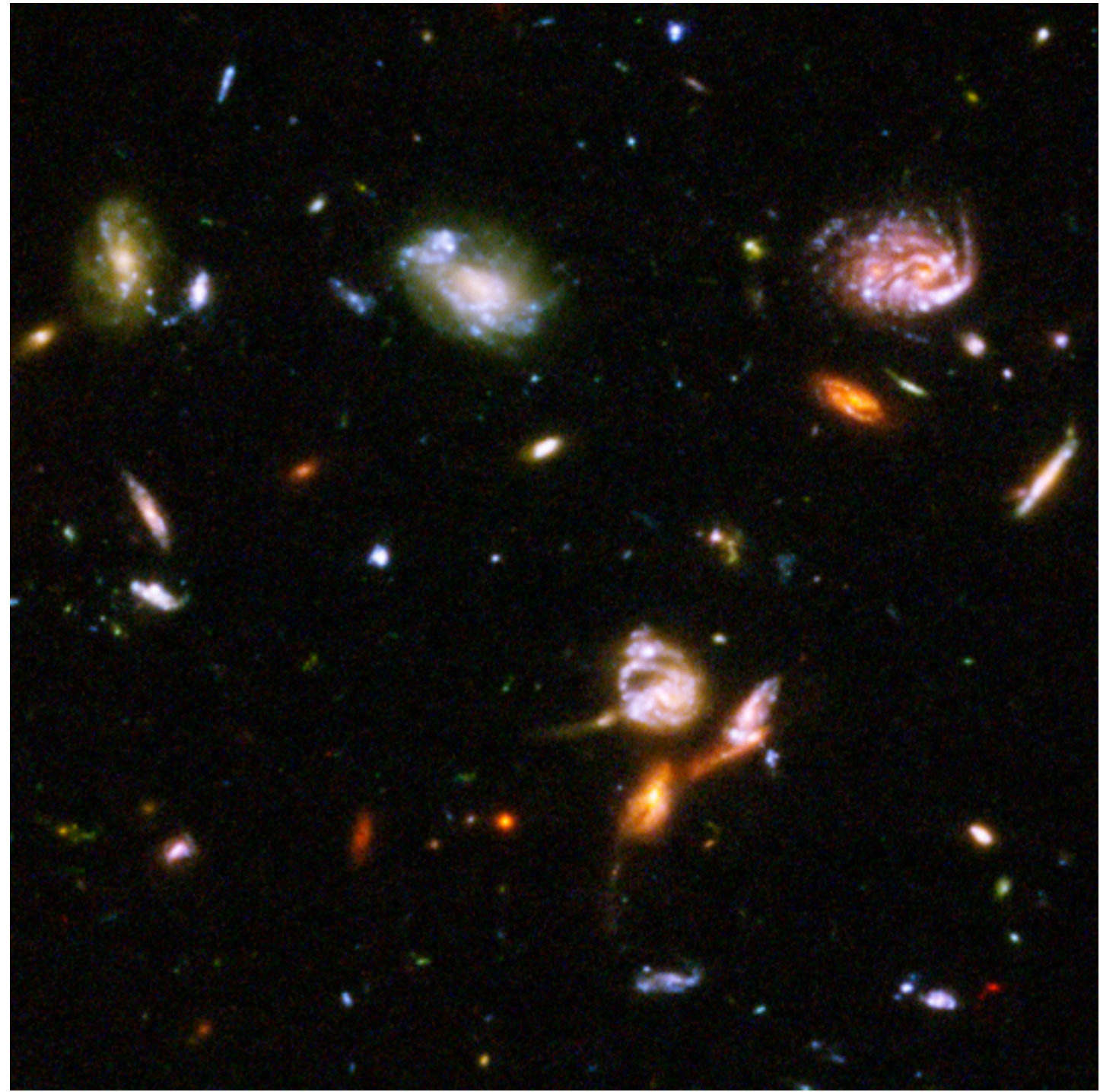
Fu la previsione teorica dell'antimateria.

La scoperta sperimentale del *positrone* arrivò un anno dopo, il 2 agosto 1932, grazie al fisico americano Carl David Anderson.



Quando si combina la relatività con la meccanica quantistica, si ottiene uno straordinario risultato: se *in natura esiste un certo tipo di particella (elettrone, protone, quark, ...), allora esiste necessariamente anche la sua anti-versione.*

Poiché l'emissione elettromagnetica dell'antimateria è identica a quella della materia, una di queste galassie potrebbe benissimo essere un'anti-galassia!



I fisici e gli astronomi stanno cercando indizi della presenza di anti-stelle attraverso la rivelazione di anti-ioni nei raggi cosmici.



Esperienze più dirette di anti-mondi non sono raccomandabili...



Ritorno sulla Terra

Ci stiamo avvicinando alla conclusione, ma prima parliamo di una previsione *sbagliata* di Dirac!

‘[Imperfections of non-relativistic quantum mechanics] give rise to difficulties only when high-speed particles are involved, and are therefore of no importance in the consideration of atomic and molecular structure and ordinary chemical reactions’

(Dirac 1929)

I chimici si sono accorti di recente che certi elementi pesanti si discostano dal comportamento che ci si aspetterebbe dalla loro posizione nella tavola periodica.

The image shows a periodic table of elements with color-coded groups. A legend in the top left identifies the groups: Alkali (orange), Alkaline (yellow), Transition (pink), Lanthanoid (magenta), Actinoid (red), Post-transition (light blue), Metalloid (teal), Nonmetal (green), Halogen (light green), Noble gas (purple), and Unknown (grey). The table includes elements from Hydrogen (1) to Oganesson (118). Annotations include a yellow circle around Rutherfordium (104) and Dubnium (105), a yellow oval around Copernicium (112), and a yellow arrow pointing from the Dubnium circle to Plutonium (94). The actinoid series is labeled with ** and the lanthanoid series with *.

1 H Hydrogen																	2 He Helium
3 Li Lithium	4 Be Beryllium											5 B Boron	6 C Carbon	7 N Nitrogen	8 O Oxygen	9 F Fluorine	10 Ne Neon
11 Na Sodium	12 Mg Magnesium											13 Al Aluminium	14 Si Silicon	15 P Phosphorus	16 S Sulfur	17 Cl Chlorine	18 Ar Argon
19 K Potassium	20 Ca Calcium	21 Sc Scandium	22 Ti Titanium	23 V Vanadium	24 Cr Chromium	25 Mn Manganese	26 Fe Iron	27 Co Cobalt	28 Ni Nickel	29 Cu Copper	30 Zn Zinc	31 Ga Gallium	32 Ge Germanium	33 As Arsenic	34 Se Selenium	35 Br Bromine	36 Kr Krypton
37 Rb Rubidium	38 Sr Strontium	39 Y Yttrium	40 Zr Zirconium	41 Nb Niobium	42 Mo Molybdenum	43 Tc Technetium	44 Ru Ruthenium	45 Rh Rhodium	46 Pd Palladium	47 Ag Silver	48 Cd Cadmium	49 In Indium	50 Sn Tin	51 Sb Antimony	52 Te Tellurium	53 I Iodine	54 Xe Xenon
55 Cs Cesium	56 Ba Barium	*	72 Hf Hafnium	73 Ta Tantalum	74 W Tungsten	75 Re Rhenium	76 Os Osmium	77 Ir Iridium	78 Pt Platinum	79 Au Gold	80 Hg Mercury	81 Tl Thallium	82 Pb Lead	83 Bi Bismuth	84 Po Polonium	85 At Astatine	86 Rn Radon
87 Fr Francium	88 Ra Radium	**	104 Rf Rutherfordium	105 Db Dubnium	106 Sg Seaborgium	107 Bh Bohrium	108 Hs Hassium	109 Mt Meitnerium	110 Ds Darmstadtium	111 Rg Roentgenium	112 Cn Copernicium	113 Uut Ununtrium	114 Fl Flerovium	115 Uup Ununpentium	116 Lv Livermorium	117 Uus Ununseptium	118 Uuo Ununoctium
*	57 La Lanthanum	58 Ce Cerium	59 Pr Praseodymium	60 Nd Neodymium	61 Pm Promethium	62 Sm Samarium	63 Eu Europium	64 Gd Gadolinium	65 Tb Terbium	66 Dy Dysprosium	67 Ho Holmium	68 Er Erbium	69 Tm Thulium	70 Yb Ytterbium	71 Lu Lutetium		
**	89 Ac Actinium	90 Th Thorium	91 Pa Protactinium	92 U Uranium	93 Np Neptunium	94 Pu Plutonium	95 Am Americium	96 Cm Curium	97 Bk Berkelium	98 Cf Californium	99 Es Einsteinium	100 Fm Fermium	101 Md Mendelevium	102 No Nobelium	103 Lr Lawrencium		

L'equazione di Schrödinger ordinaria è *incapace* di spiegare queste deviazioni, ma i calcoli basati sull'equazione di Dirac si accordano con i dati sperimentali.

Ciò mostra la *natura relativistica* di questi fenomeni (in parole povere: negli atomi pesanti la velocità degli elettroni degli orbitali interni è così elevata che gli effetti relativistici diventano importanti).

L'interesse per gli effetti relativistici sugli elementi non è solo accademico: i chimici stanno studiando la possibilità di ottenere nuove leghe e composti.

E' una nuova disciplina: la **chimica quantistica relativistica**.

Ma uno dei più evidenti effetti relativistici nella vita di tutti i giorni riguarda *l'oro*.

Sia nell'argento che nell'oro l'elettrone più esterno occupa un orbitale *d* e, assorbendo un fotone, può effettuare una transizione all'orbitale *s* superiore.

Ma, per effetti relativistici, la differenza di energia fra *d* e *s* nell'oro è *minore*, tanto che è sufficiente un fotone *blu* per la transizione, mentre nell'argento è necessario un fotone *ultravioletto*.

Di conseguenza l'argento riflette tutta la luce visibile, e ci appare di colore grigio chiaro, mentre l'oro assorbe la componente blu e ci appare giallo!

Oro “non-relativistico”

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi = E\psi$$



Oro “relativistico”

$$(c\hbar \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta mc^2 + \mathcal{A}) \psi = E\psi$$



Grazie per l'attenzione!