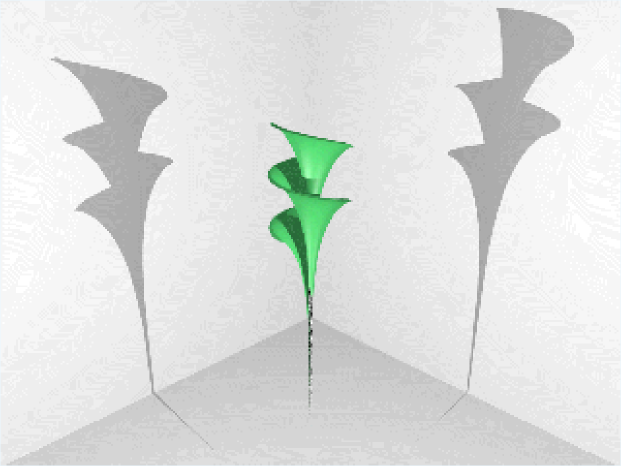


Mathesis – Firenze

Sezione di FIRENZE
24 febbraio 2010

MATRICI E POPOLAZIONI STRATIFICATE

Gloria Papi
Dipartimento di Matematica "U.Dini"
papi@math.unifi.it

Introduzione: modelli di accrescimento

- POPOLAZIONE: insieme di elementi, gli individui, il cui numero, la dimensione della popolazione, può cambiare nel tempo

- I MODELLI DI ACCRESCIMENTO si propongono di studiare come la dimensione della popolazione cambia nel tempo

- I modelli di accrescimento che andremo a considerare possono essere di due tipi: modelli a TEMPO DISCRETO e modelli a TEMPO CONTINUO.
  Indicando con T l'insieme degli istanti ai quali si vuole conoscere la dimensione della popolazione, T può essere una successione di istanti $t_0, t_1, \ldots\ldots$ Il modello corrispondente è allora chiamato a tempo discreto. Con un opportuno cambiamento di scala temporale si può supporre che T sia l'insieme, o un sottoinsieme dei numeri naturali, ossia $t_0 = 0, t_1 = 1, \ldots, t_n = n, \ldots\ldots$
  Alternativamente, T può essere la semiretta $[0, +\infty)$ o un intervallo. $[0, a]$. In tal caso il modello è detto a tempo continuo

Ipotesi matematiche ed equazioni

$x(t)$ dimensione della popolazione all'istante fissato t

$x(t+h)$ dimensione della popolazione all'istante successivo t+h, h>0

$\delta x(t) = x(t+h) - x(t)$ accrescimento della popolazione (positivo o negativo) tra gli istanti t, t+h

Cause dell'accrescimento:

Nascita di individui tra gli istanti t e t+h: n(t,t+h)
Morte di individui tra gli istanti t e t+h: m(t,t+h)
Emigrazione di individui tra gli istanti t e t+h: e(t,t+h)
Immigrazione di individui tra gli istanti t e t+h: i(t,t+h)

$$\delta x(t) = [n(t,t+h) - m(t,t+h)] + [i(t,t+h) - e(t,t+h)]$$

Accrescimento della popolazione

Modello a tempo discreto

Ipotesi matematica: Il numero delle modificazioni, nascita, morte, emigrazione, immigrazione, che avvengono in due istanti successivi t e t+h dipendono soltanto da t e dalla dimensione della popolazione all'istante t

Introduciamo:

$$n^*(t,x(t)) = \frac{n(t,x(t))}{x(t)}$$ tasso di nascita

$$m^*(t,x(t)) = \frac{m(t,x(t))}{x(t)}$$ tasso di morte

$$e^*(t,x(t)) = \frac{e(t,x(t))}{x(t)}$$ tasso di emigrazione

$$i^*(t,x(t)) = \frac{i(t,x(t))}{x(t)}$$ tasso di immigrazione

$$r(t,x(t)) = n^*(t,x(t)) - m^*(t,x(t)) + e^*(t,x(t)) - i^*(t,x(t))$$

Tasso di accrescimento

$$x(t,t+1) = x(t)[1 + r(t, x(t))]$$

Equazione di accrescimento
a tempo discreto (h=1)

Modello a tempo continuo $h \to 0$

Ipotesi matematiche: $$\frac{n(t,t+h)}{h} = \nu(t, x(t)) + \circ(1)$$

$$n^*(t, x(t)) = \frac{\nu(t, x(t))}{x(t)}$$ tasso istantaneo di natalità,

etc,…..

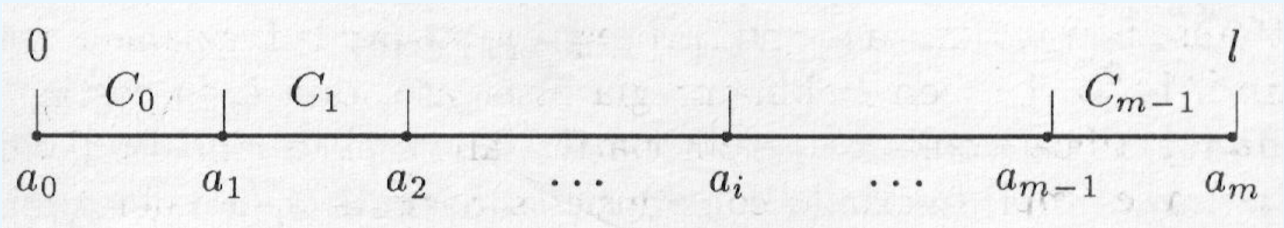
$$\frac{dx}{dt} = xr(t,x)$$

Equazione di accrescimento
a tempo continuo ($h \to 0$)
r(t,x) tasso istantaneo di crescita

Popolazioni complesse. Matrice di sopravvivenza

Studio della evoluzione di una popolazione in classi di età

l età massima della popolazione



$C_i = [a_i, a_{i+1}[, \quad i = 0, 1, \ldots\ldots, m-1$ Classi di età

$x_i(t)$ Dimensione della classe C_i all'istante *t*

$\mathbf{x}(t) = [x_0(t), x_1(t), \ldots\ldots, x_{m-1}(t)]^T$ Vettore colonna che descrive la composizione della popolazione al tempo *t*

$$x(t) = \sum_{i=0}^{m-1} x_i(t)$$ Dimensione della popolazione totale

$$c_i(t) = \frac{x_i(t)}{x(t)}$$ *i=0,1,……,m-1* Distribuzione di età della classe C_i

Supponiamo per semplicità

Lunghezza delle classi C_i tutte uguali a *1*
Unici fenomeni che interessano la popolazione: invecchiamento e morte

Un individuo che all'istante t appartiene alla classe C_i ed ha età *a* ha soltanto due possibilità:

- Muore prima dell'istante *t+1*
- All'istante *t+1* la sua età diventa *a+1* e quindi passa alla classe C_{i+1}

$$x_i(t) - x_{i+1}(t+1) = \mu_i(t) x_i(t)$$

dove $\mu_i(t)$ è il tasso di mortalità
(force of mortality)

oppure

$$x_{i+1}(t+1) = p_i(t) x_i(t)$$

dove $p_i(t)$ è il tasso di sopravvivenza
(probability of survival)

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_0(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p_1(t) & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & p_{m-2}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di sopravvivenza (m X m)

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0(t+1) & = & 0 \\ x_1(t+1) & = & p_0(t)x_0(t) \\ \ldots\ldots & & \\ x_{m-1}(t+1) & = & p_{m-2}(t)x_{m-2}(t) \end{cases}$$

Equazioni della dinamica della popolazione in forma vettoriale

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(t-1)\ldots\ldots\mathbf{S}(0)\mathbf{x}(0)$$

Equazione della dinamica della popolazione in dipendenza della condizione iniziale

Esempio

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice (9.2)

Matrice di sopravvivenza costante nel tempo

$$x(0) = [6, 4, 2, 1]^T$$

Composizione iniziale della popolazione

$$C_0 = [0, 1[, \ C_1 [1, 2[, \ C_2 [2, 3[, \ C_3 [3, 4[$$

Classi di età

Piramide delle età

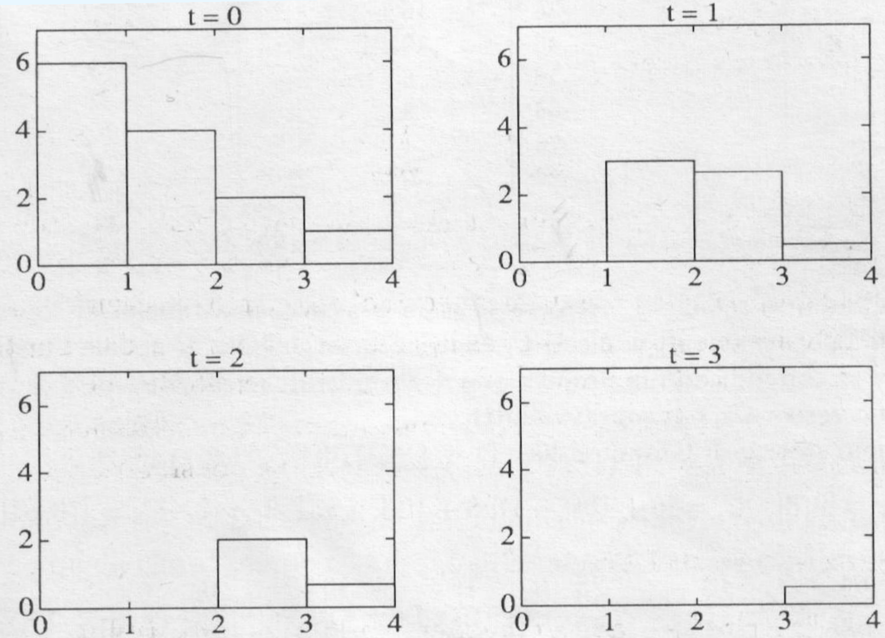


Figura 9.6. Illustrazione dell'evoluzione della popolazione corrispondente alla matrice di sopravvivenza (9.22).

Dimensione totale della popolazione: x(0)=13, x(1)=6,1667, x(2)=2,6667, X(3)=0,5 e x(4)=0.

Tasso totale di accrescimento variabile con il tempo:

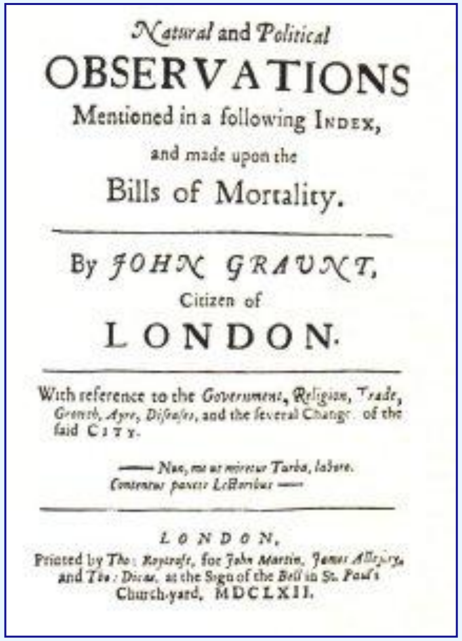
r(0)=(x(1)-x(0))/x(0)=-0,5256, r(1)=-0,5676, r(2)=-0,8125

Non è malthusiana anche se la matrice di sopravvivenza è costante

Tavole di sopravvivenza

L'idea di partizionare la vita in classi di età è dovuta a John Graunt (1620-1674).
I risultati delle ricerche sono esposti in un breve volume, dal titolo lungo:

Natural and political observations mentioned in a following index, and made upon the bills of mortality, with reference to the governement, religion, trade, growth, air, diseases, and the several changes of the said city, Londra (1662)



Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.

By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.

With reference to the *Government*, *Religion*, *Trade*, *Growth*, *Ayre*, *Diseases*, and the several Changes of the said CITY.

—— *Non, me ut miretur Turba, laboro.*
Contentus paucis Lectoribus ——

LONDON,
Printed by *Tho: Roycroft*, for *John Martin*, *James Allestry*, and *Tho: Dicas*, at the Sign of the *Bell* in *St. Paul's* Church-yard, MDCLXII.

Successivamente un contributo importante venne da Leonhard Euler con il lavoro

Recherche générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain,
Berlino (1760)

età	sopravvissuti
6	64
16	40
26	25
36	16
46	10
56	6
66	3
76	1
86	0

Tabella di sopravvivenza

A 6 anni erano sopravvissuti 64 individui
A 16 anni erano sopravvissuti 40 individui
Etc.…

Nell'esempio storico di Graunt si hanno 9 classi di età

$$C_0 = [0,6[,\ \ C_i = [6+10(i-1), 6+10i[,\ \ i = 1,2,\ldots\ldots,7,\ \ C_8 = [76,81[$$

e i tassi di sopravvivenza sono

$$p_0 = \frac{64}{100},\ p_1 = \frac{40}{64},\ p_2 = \frac{25}{40},\ p_3 = \frac{16}{25},\ p_4 = \frac{10}{16},\ p_5 = \frac{6}{10},\ p_6 = \frac{3}{6},\ p_7 = \frac{1}{3}$$

Popolazioni complesse. Matrice di riproduzione

Introduciamo anche il processo delle nascite

$$n_i(t, t+1)$$

Numero di nuovi individui che sono originati nell'intervallo [*t*,*t*+*1*[da individui appartenenti a C_i

$$n_i(t, t+1) = f_i(t)x_i(t)$$

Le funzioni $f_i(t)$ sono dette tasso di fecondità della classe C_i
Si è fatto l'ipotesi che tra le varie classi non vi siano interferenze e che

$$f_i(t, x(t)) = f_i(t)$$

Gli individui nati nell'intervallo [*t*,*t*+*1*[vanno a ripopolare la classe $C_0(t+1)$

$$x_0(t+1) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i(t)x_i(t)$$

Equazione di bilancio

Le dimensioni delle altre classi vengono aggiornate come visto precedentemente

$$x_{i+1}(t+1) = p_i(t)x_i(t),$$ *i=0,1,2,….,m-1*

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} f_0(t) & f_1(t) & \ldots\ldots & & f_{m-1}(t) \\ p_0(t) & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ 0 & p_1(t) & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & p_{m-2}(t) & \ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Matrice di riproduzione o matrice di Leslie

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{R}(t)\mathbf{x}(t)$$

Equazione di evoluzione in forma vettoriale

Dalla relazione

$$x_{i+1}(t+1) = p_0(t-i)p_1(t-i+1)\ldots\ldots p_{i-1}(t-1)x_0(t-i), \;\; i \geq 0, t \geq i$$

Tale relazione esprime il fatto che gli individui che appartengono alla classe C_i al tempo t sono quelli che al tempo t-i erano presenti nella classe C_0 e successivamente hanno attraversato le classi $C_1, C_2, \ldots\ldots, C_{i-1}$, C_i
Sostituendo nell'equazione di bilancio si ottiene

$$x_0(t+1) = f_0(t)x_0(t) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(t)p_0(t-i)p_1(t-i+1)\ldots\ldots p_{i-1}(t-1)x_0(t-i)$$

Equazione di rinnovamento (renewal equation)

Essa esprime il fatto ovvio che ogni neonato all'istante t+1 discende da un adulto che era un neonato ad un istante anteriore

Il comportamento della popolazione dipende dalle proprietà della matrice di riproduzione **R**, che deve essere determinata (fittata) sulla base di opportune osservazioni sperimentali (statistiche) ricavate dalla popolazione in esame.

VOLUME XXXIII, PART III — NOVEMBER 1945

ON THE USE OF MATRICES IN CERTAIN POPULATION MATHEMATICS

BY P. H. LESLIE, *Bureau of Animal Population, Oxford University*

CONTENTS

1. INTRODUCTION

If we are given the age distribution of a population on a certain date, we may require to know the age distribution of the survivors and descendants of the original population at successive intervals of time, supposing that these individuals are subject to some given age-specific rates of fertility and mortality. In order to simplify the problem as much as possible, it will be assumed that the age-specific rates remain constant over a period of time, and the female population alone will be considered. The initial age distribution may be entirely arbitrary; thus, for instance, it might consist of a group of females confined to only one of the age classes.

The method of computing the female population in one unit's time, given any arbitrary age distribution at time t, may be expressed in the form of $m+1$ linear equations, where m to $m+1$ is the last age group considered in the complete life table distribution, and when the same unit of age is adopted as that of time. If

n_{xt} = the number of females alive in the age group x to $x+1$ at time t,

P_x = the probability that a female aged x to $x+1$ at time t will be alive in the age group $x+1$ to $x+2$ at time $t+1$,

F_x = the number of daughters born in the interval t to $t+1$ per female alive aged x to $x+1$ at time t, who will be alive in the age group 0–1 at time $t+1$,

then, working from an origin of time, the age distribution at the end of one unit's interval will be given by

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{m} F_x n_{x0} &= n_{01} \\ P_0 n_{00} &= n_{11} \\ P_1 n_{10} &= n_{21} \\ P_2 n_{20} &= n_{31} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \end{aligned}$$

I primi studi su queste matrici sono dovuti a

P.H. Leslie “On the use of matrices in certain population mathematics”, Biometrika (1945)

H. Bernardelli “Population waves” , Journal of the Burma Research Society (1941)

Esempio: *popolazioni stratificate per età*

Consideriamo una popolazione di animali con riproduzione annuale.

anno come unità di tempo
4 classi di età

85% sopravvive al primo anno (età 0)
98% sopravvive al secondo anno
97% sopravvive al terzo anno
0 al quarto anno

La riproduzione è impossibile all'anno 0
5% all'anno 1
65% all'anno 2
90% all'anno 3

Coefficienti di sopravvivenza: 0,85, 0,98, 0,97, 0 (1/anno)
Coefficienti di fertilità: 0, 0,05, 0,65, 0,9 (1/anno)

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0,05 & 0,65 & 0,9 \\ 0,85 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,97 & 0 \end{bmatrix}$$

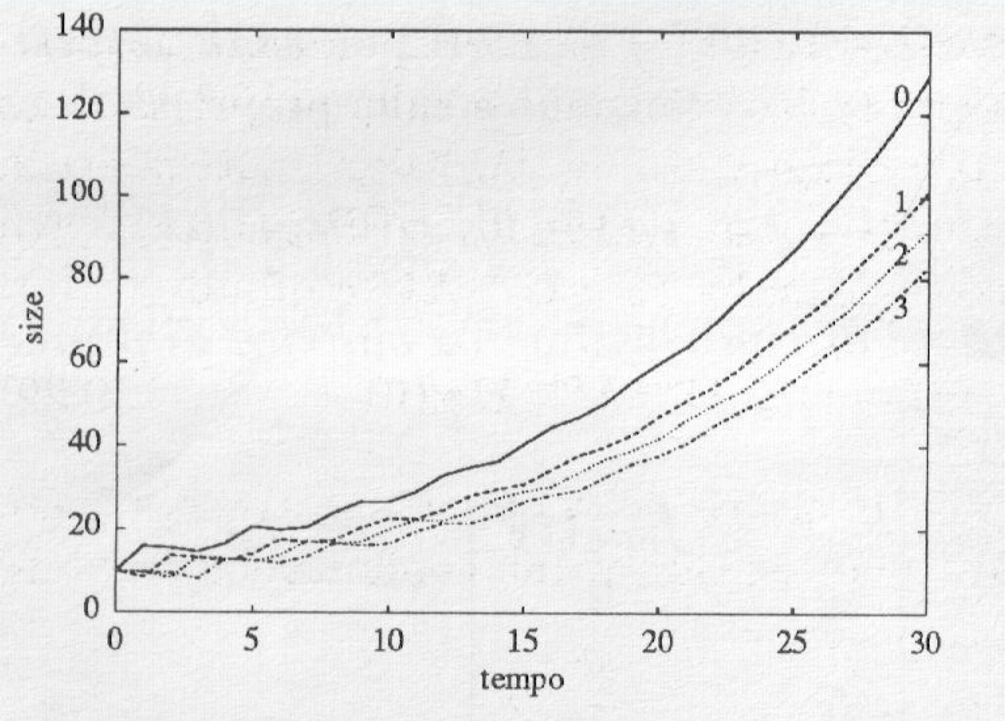
Matrice di riproduzione

$$\mathbf{R} = \begin{cases} x_0(t+1) &= 0,05x_1(t) + 0,65x_2(t) + 0,9x_3(t) \\ x_1(t+1) &= 0,85x_0(t) \\ x_2(t+1) &= 0,98x_1(t) \\ x_3(t+1) &= 0,97x_2(t) \end{cases}$$

Sistema di evoluzione

$$\mathbf{x}(0) = [10, 10, 10, 10]^T$$

Condizione iniziale

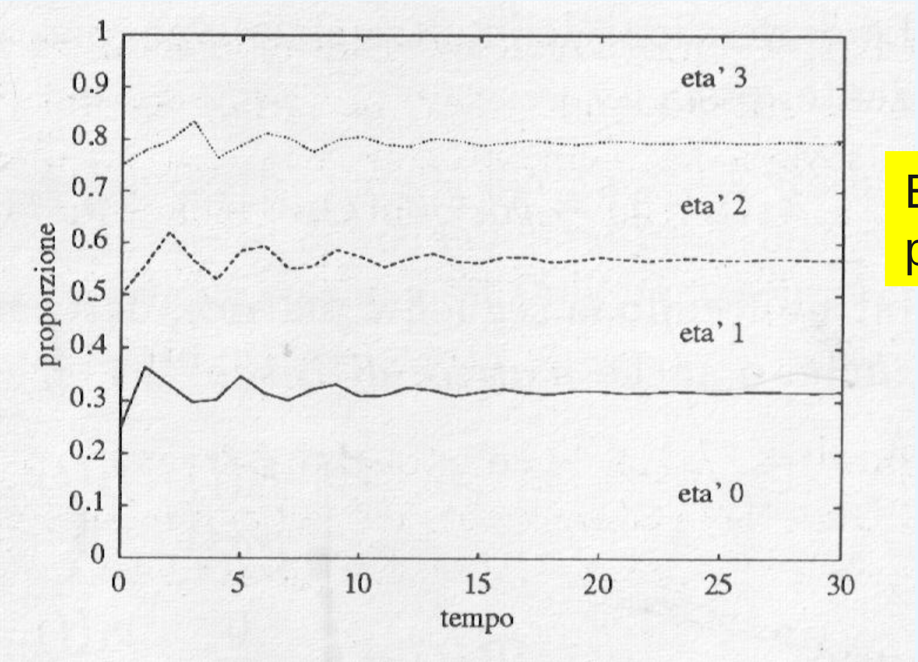


Evoluzione della popolazione descritta dalla matrice **R** a partire
dalla condizione iniziale

Crescita esponenziale (Malthusiana)

$$\frac{x_0(t)}{\sum_{j=0}^{3} x_j(t)}, \quad \frac{x_0(t)+x_1(t)}{\sum_{j=0}^{3} x_j(t)}, \quad \frac{x_0(t)+x_1(t)+x_2(t)}{\sum_{j=0}^{3} x_j(t)}$$

Composizione della popolazione al tempo t



Evoluzione della composizione della popolazione

$\mathbf{x}(0) = [20, 4, 4, 4]^T$

Condizione iniziale diversa

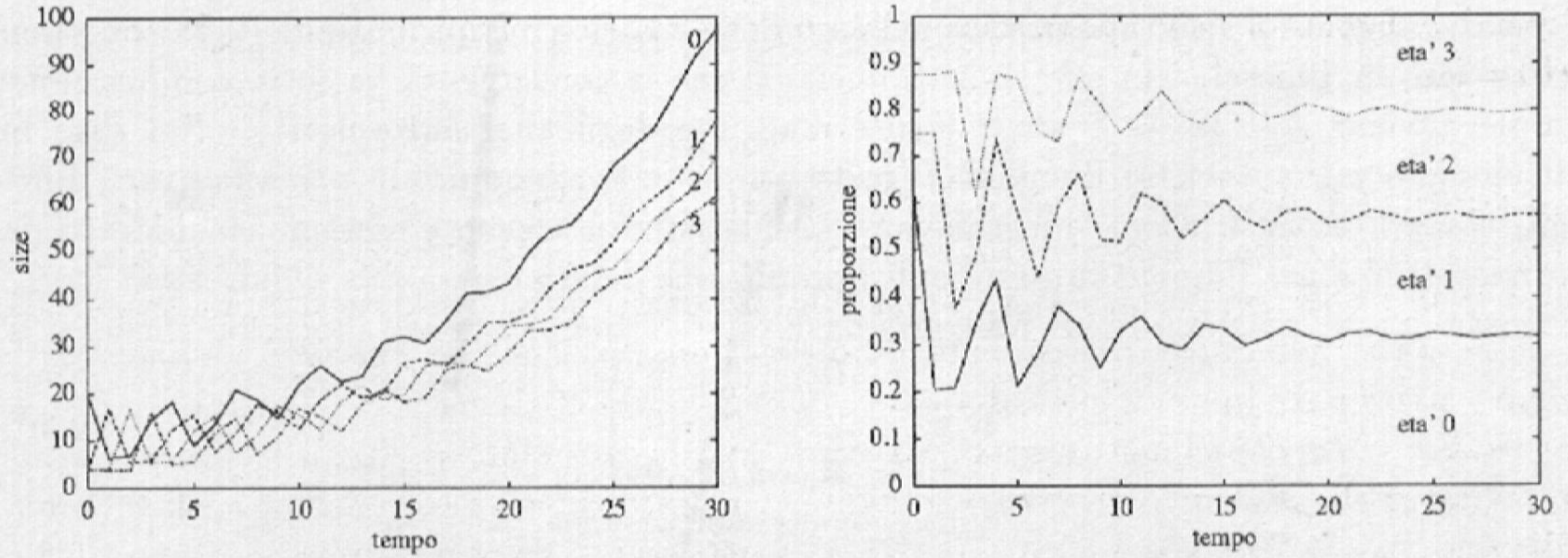


Figura 9.8. Evoluzione della popolazione descritta dal modello (9.27) a partire dallo stato iniziale $\mathbf{x}(0) = [20,\ 4,\ 4,\ 4]^T$.

Crescita esponenziale (Malthusiana)

La composizione evolve indipendentemente dalla condizione iniziale

La popolazione si dice stabile se la composizione converge sempre ad una stessa configurazione costante indipendentemente dalla condizione iniziale

Nell'esempio precedente la popolazione è stabile

Conseguenze di queste proprietà sulla matrice di riproduzione

$$\mathbf{x}(t+1) = \lambda \mathbf{x}(t) \Leftrightarrow \mathbf{R}\mathbf{x}(t) = \lambda \mathbf{x}(t)$$

poiché la composizione è costante

Cioè λ è autovalore della matrice **R** e $\mathbf{x}(t)$ un corrispondente autovettore

$$\Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$$

Matrice diagonale degli autovalori di **R**

U Matrice le cui colonne sono gli autovettori u_i corrispondenti agli autovalori λ_i

Se **U** è invertibile si ha $\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1}\Lambda\mathbf{U}$

E quindi

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{R}\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}^t\mathbf{x}(0) \Rightarrow \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{U}^{-1}\Lambda^{t+1}\mathbf{U}\mathbf{x}(0)$$

In altre parole le componenti del vettore **x**(t+1) risultano delle opportune combinazioni lineari delle componenti del vettore iniziale **x**(0) e i coefficienti di tali combinazioni contengono delle potenze λ_i^{t+1}

Vediamo l'esempio della matrice di riproduzione precedente. Si hanno i seguenti autovalori ordinati per ordine del modulo decrescente

$$\lambda_1 = 1,0802; \;\; \lambda_{2,3} = -0,1586 \pm 0,9258i; \;\; |\lambda_{2,3}| = 0,9393; \;\; \lambda_4 = 0,7630$$

Essendo tali autovalori distinti si ricava che lo spazio degli autovettori ha dimensione quattro e quindi la matrice **U** è invertibile.

$$
\begin{aligned}
x_0(t+1) &= a_0\lambda_1^{t+1} + b_0\lambda_2^{t+1} + c_0\lambda_3^{t+1} + d_0\lambda_4^{t+1} \\
\ldots\ldots & \\
x_3(t+1) &= a_3\lambda_1^{t+1} + b_3\lambda_2^{t+1} + c_3\lambda_3^{t+1} + d_3\lambda_4^{t+1}
\end{aligned}
$$

Evoluzione della popolazione
In dipendenza dello stato
iniziale

Con queste formule si capisce l'andamento evidenziato nelle figure

L' autovalore di modulo massimo determina il comportamento asintotico della soluzione ed è detto

parametro di accrescimento naturale
natural growth rate

Esempio di Bernardelli

In questo esempio si troverà che la matrice di riproduzione ha più autovalori dominanti, cioè con lo stesso modulo, Allora i comportamenti della soluzione possono essere di tipo diverso

Take a species, say a beetle, wich lives three years only, and which propagates in its third year of life. Let the survival rate of the first age-group be 1/2, of the second 1/3, and assume that each female in the age 2-3 produces, in the average, 6 new living females”; population waves (1941)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di riproduzione di Bernardelli

$$\lambda_1 = 1; \;\; \lambda_{2,3} = -0,5 \pm 0,866i; \;\; |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

Autovalori della matrice di Bernardelli

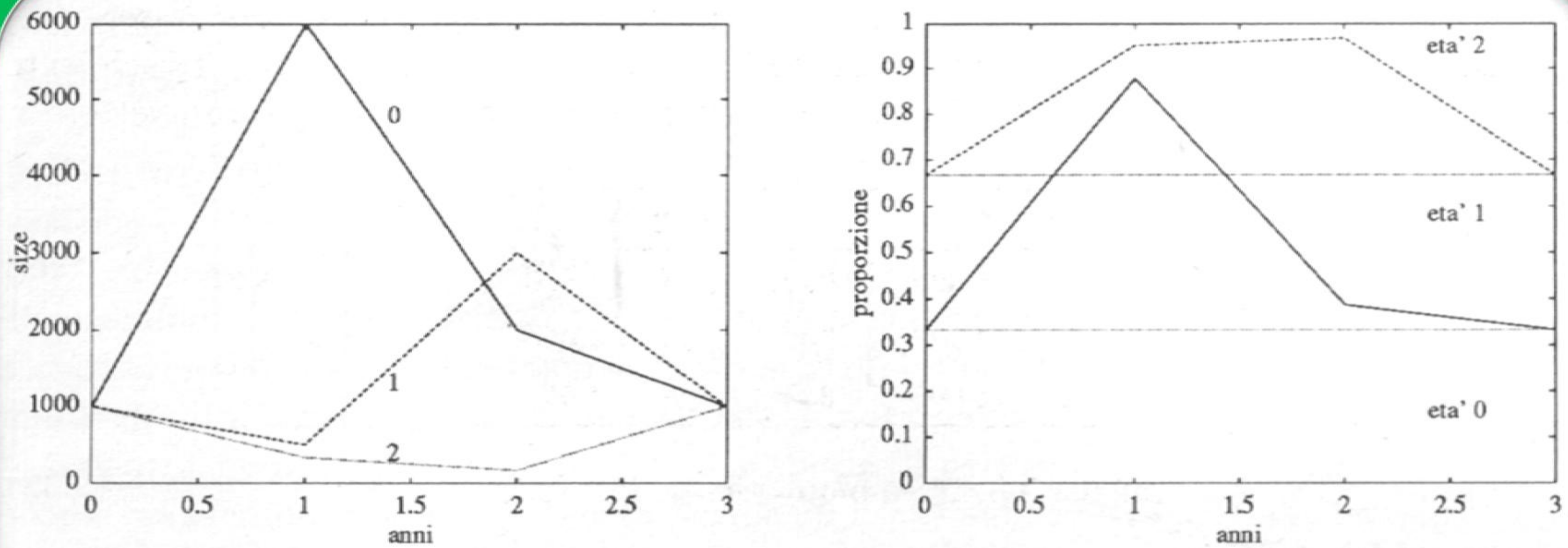


Figura 9.9. Comportamento periodico corrispondente al modello (9.30).

Esempio: gestione di un allevamento

ma(i) = numero dei maschi adulti
fa(i) = numero delle femmine adulte
2m(i), 2f(i) = numero dei maschi (risp. femmine) di due anni
1m(i), 1f(i) = numero dei maschi (risp. femmine) di un anno

Unità di tempo: **un anno**

Alla fine di ogni anno vengono prelevati soltanto gli adulti

qm(i) = numero maschi adulti prelevati
qf(i) = numero femmine adulte prelevate

$$\mathbf{g}(i) = [ma(i), fa(i), 2m(i), 2f(i), 1m(i), 1f(i)]^T$$

Numero di animali che rimangono dopo il prelievo alla fine dell'anno i-imo nelle sei categorie

$$\mathbf{q}(i) = [mq(i), fq(i), 0, 0, 0, 0]^T$$

Numero di animali prelevati

h(i) = **g**(i) + **q**(i)

Numero di animali prima del prelievo annuale nelle sei categorie

Supponiamo che ogni femmina adulta possa partorire in media b1 maschi e b2 femmine e che solo una frazione p1 degli adulti, p2 dei vitelli del primo anno e p3 dei vitelli del secondo anno sopravvivano da un anno al successivo, ***il processo di allevamento in presenza di prelievo annuale può essere modellizzato dal seguente sistema di equazioni alle differenze***

$$
\begin{aligned}
ma(i) &= p_1 ma(i-1) + p_3 2m(i-1) - mq(i) \\
fa(i) &= p_1 fa(i-1) + p_3 2f(i-1) - fq(i) \\
2m(i) &= p_2 1m(i-1) \\
2f(i) &= p_2 1f(i-1) \\
1m(i) &= b_1 fa(i-1) \\
1f(i) &= b_2 fa(i-1)
\end{aligned}
$$

In termini matriciali il sistema diventa

$$
\begin{bmatrix} ma(i) \\ fa(i) \\ 2m(i) \\ 2f(i) \\ 1m(i) \\ 1f(i) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_1 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\
0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} ma(i-1) \\ fa(i-1) \\ 2m(i-1) \\ 2f(i-1) \\ 1m(i-1) \\ 1f(i-1) \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} qm_i \\ qf_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

ossia **g** = **Mg**(i-1) –**q**(i)

La matrice **M** e chiamata ***matrice di trasformazione*** del modello.

Essa trasforma la struttura dell'allevamento dopo il prelievo ad un certo anno, nella struttura prima del prelievo nell'anno successivo.

Gli elementi della matrice devono essere identificati sulla base di osservazioni sperimentali. Una volta nota la matrice M, le successioni mq(i) e fq(i) rappresentano delle ***funzioni di controllo*** attraverso le quali si può regolare l'andamento della popolazione

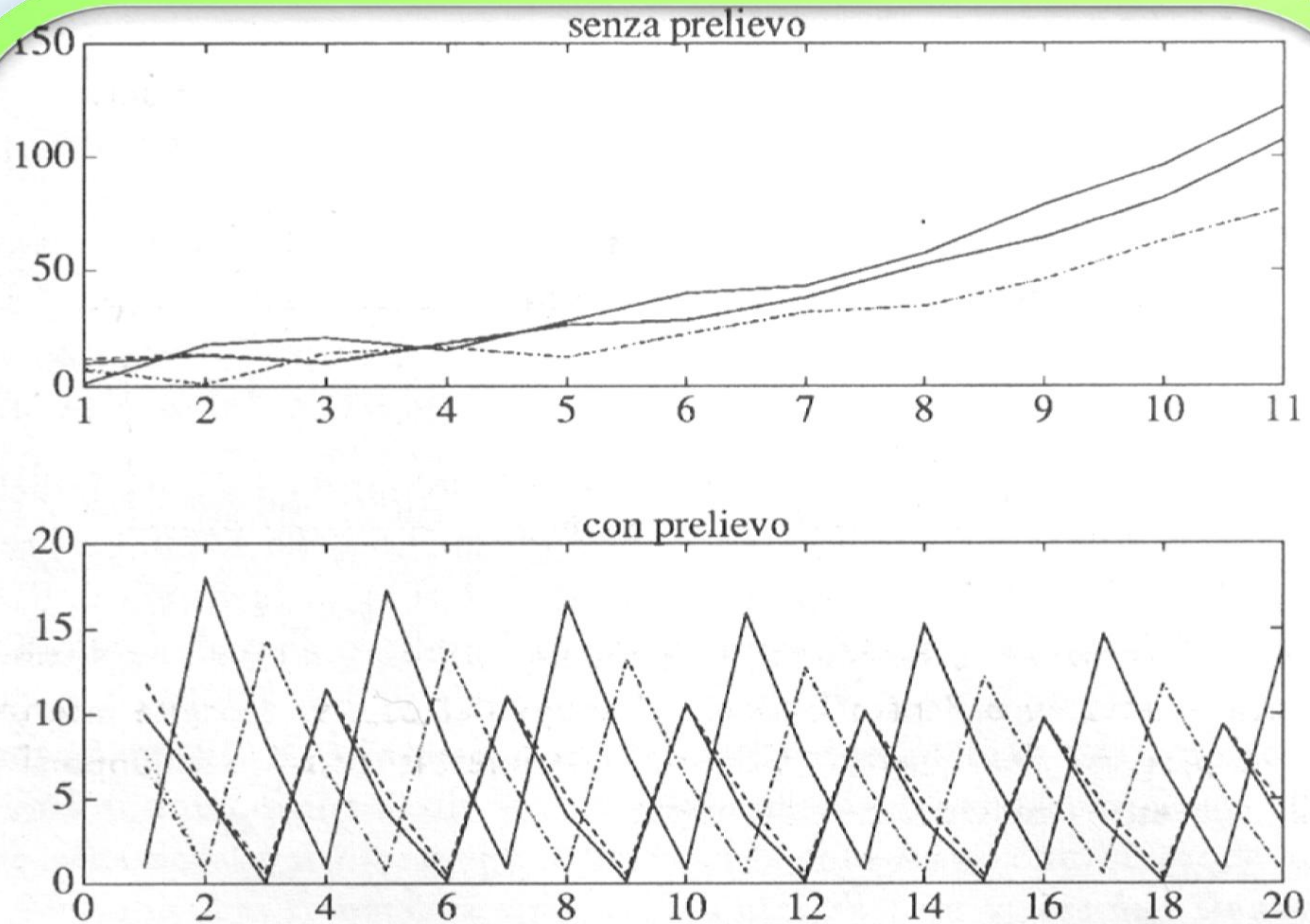


Figura 9.10. Illustrazione dell'Esempio 9.10.

Grazie per l'attenzione.